

# Topología I

## Examen XI

FACULTAD  
DE  
CIENCIAS  
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://github.com/losdeldgiim)

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas  
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

# Topología I

# Examen XI

Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://github.com/losdeldgiim)

Jesús Muñoz Velasco

Granada, 2024-2025

**Asignatura** Topología I.

**Curso Académico** 2024-25.

**Grado** Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

**Grupo** Único.

**Profesor** Antonio Alarcón.

**Descripción** Segundo Parcial.

**Fecha** 13 de diciembre de 2024.

**Duración** 90 minutos.

**Ejercicio 1** (3 puntos). Dados espacios topológicos  $(X, \mathcal{T})$  e  $(Y, \mathcal{T}')$ , demuestra que la proyección

$$\pi_Y : (X, Y, \mathcal{T} \times \mathcal{T}')$$

es continua y abierta. Da un ejemplo que demuestre que, en general, no es cerrada.

Veamos en primer lugar que  $\pi_Y$  es continua. Sea  $U \in \mathcal{T}'$ , tenemos que  $\pi_Y^{-1}(U) = \{(x, y) \in X \times Y : y \in U\} = X \times U \in \mathcal{T} \times \mathcal{T}'$  por lo que es continua.

Veamos ahora que es abierta. Para ello consideramos la siguiente base de la topología producto:

$$\mathcal{B}_{\mathcal{T} \times \mathcal{T}'} = \{U \times U' : U \in \mathcal{T}, U' \in \mathcal{T}'\}$$

Sea  $U \times U' \in \mathcal{B}_{\mathcal{T} \times \mathcal{T}'}$ , entonces tenemos  $\pi_Y(U \times U') = U' \in \mathcal{T}'$ .

Veamos además que en general no es cerrada. Para ello consideramos la topología  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_u)$  que es la topología producto de  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$  consigo misma. Consideramos además la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow ]-\pi/2, \pi/2[$  dada por  $f(x) = \arctan(x)$ . Consideramos ahora el grafo de  $f$  definido como  $G(f) = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\} \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}_u}$ . Sin embargo tenemos que  $\pi_Y(G(f)) = ]-\pi/2, \pi/2[ \notin \mathcal{C}_{\mathcal{T}_u}$  por lo que en esta topología la proyección no es cerrada ya que  $\exists C \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$  tal que  $\pi_Y(C) \notin \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$ .

**Ejercicio 2** (3 puntos). Sea  $(X, \mathcal{T})$  un espacio topológico y supongamos que para todo espacio topológico  $(Y, \mathcal{T}')$  se tiene que toda aplicación  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$  es continua. Demuestra que  $\mathcal{T}$  es la topología discreta.

Tomamos  $(Y, \mathcal{T}') = (X, \mathcal{T}_{disc})$  y  $f = Id_X$ . Como la aplicación  $Id_X : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X, \mathcal{T}_{disc})$  es continua por hipótesis, entonces  $\mathcal{T}_{disc} \leq \mathcal{T}$ . Como siempre se da la otra inclusión ( $\mathcal{T}_{disc} \geq \mathcal{T}$ ) tenemos que  $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{disc}$ .

**Ejercicio 3** (4 puntos). En la circunferencia  $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$  consideramos la topología  $\mathcal{T}_u|_{\mathbb{S}^1}$  inducida por la topología usual  $\mathcal{T}_u$  de  $\mathbb{R}^2$ .

1. Sea  $R$  la relación de equivalencia en  $\mathbb{S}^1$  dada por

$$(x, y)R(x', y') \iff x = x'.$$

Demuestra que el espacio topológico cociente  $(\mathbb{S}^1/R, \mathcal{T}_u|_{\mathbb{S}^1}/R)$  es homeomorfo a  $([-1, 1], \mathcal{T}_u|_{[-1, 1]})$ , donde  $\mathcal{T}_u|_{[-1, 1]}$  es la topología en el intervalo  $[-1, 1] \subset \mathbb{R}$  inducida por la topología usual  $\mathcal{T}_u$  de  $\mathbb{R}$ .

Consideramos la siguiente aplicación

$$\begin{aligned} f : (\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_u|_{\mathbb{S}^1}) &\rightarrow ([-1, 1], \mathcal{T}_u) \\ (x, y) &\mapsto x \end{aligned}$$

y tenemos lo siguiente:

- $f$  sobreyectiva trivialmente.
- $f$  continua ya que  $f = \pi_X|_{\mathbb{S}^1}$  y  $\pi_X$  es continua y la restricción en el dominio de una función continua sigue siendo continua.<sup>1</sup>
- $f$  es cerrada ya que su dominio,  $\mathbb{S}^1$  es cerrado y acotado en un espacio euclídeo y su codominio,  $[-1, 1]$  es un subespacio de un espacio euclídeo. Por el lema visto en clase tenemos que  $f$  es cerrada.

Tenemos que  $f$  es sobreyectiva, continua y cerrada luego  $f$  es una identificación. Tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{f} & [-1, 1] \\ \pi_f \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \\ \mathbb{S}^1/R_f & & \end{array}$$

Por tanto  $\exists \tilde{f} : (\mathbb{S}^1/R_f, \mathcal{T}_u|_{\mathbb{S}^1/R_f}) \rightarrow ([-1, 1], \mathcal{T}_u|_{[-1,1]})$  homeomorfismo con  $f = \tilde{f} \circ \pi_f$ . Nos queda comprobar que  $R_f = R$ .

En efecto, si  $(x, y), (x', y') \in \mathbb{S}^1$ , entonces

$$(x, y)R(x', y') \iff f(x, y) = f(x', y') \iff x = x' \iff (x, y)R(x', y')$$

2. Sea  $R'$  la relación de equivalencia en  $\mathbb{S}^1$  dada por

$$(x, y)R'(x', y') \iff (x, y) = (x', y') \text{ o } x = x' \neq 0.$$

Demuestra que los espacios topológicos cociente  $(\mathbb{S}^1/R, \mathcal{T}_u|_{\mathbb{S}^1/R})$  y  $(\mathbb{S}^1/R', \mathcal{T}_u|_{\mathbb{S}^1/R'})$  no son homeomorfos, donde  $R$  es la relación de equivalencia del apartado anterior.

Por el apartado anterior teníamos que  $(\mathbb{S}^1/R, \mathcal{T}_u|_{\mathbb{S}^1/R}) \cong ([-1, 1], \mathcal{T}_u|_{[-1,1]})$  que es T2, luego  $(\mathbb{S}^1/R, \mathcal{T}_u|_{\mathbb{S}^1/R})$  es T2. Como ser T2 es un invariante topológico, si comprobamos que  $(\mathbb{S}^1/R', \mathcal{T}_u|_{\mathbb{S}^1})$  no es T2 habremos probado lo que queríamos.

Si  $(x, y) \in \mathbb{S}^1$ , tenemos que su clase de equivalencia es

- $[(x, y)] = \{(x, y), (x, -y)\}$  si  $x \neq 0$
- $[(0, 1)] = \{(0, 1)\}$
- $[(0, -1)] = \{(0, -1)\}$

Veamos que la propiedad T2 no se cumple para los puntos  $[(0, -1)]$  y  $[(0, 1)]$  que son distintos en  $\mathbb{S}^1/R'$ . Sean  $\tilde{U}_1$  y  $\tilde{U}_{-1}$  entornos de  $[(0, 1)]$  y  $[(0, -1)]$  en  $\mathbb{S}^1/R'$  respectivamente. Entonces  $\tilde{U}_1 = p_{R'}(U_1)$  con  $p_{R'} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1/R'$  la proyección y  $U_1$  un entorno  $p_{R'}$ -saturado de  $(0, 1)$  en  $\mathbb{S}^1$ . Como  $U_1$  es entorno de  $(0, 1)$ , tenemos que existe  $\varepsilon > 0$  (si queremos  $\varepsilon < 1$ ) tal que

---

<sup>1</sup>También se puede ver que es continua con argumentos de análisis.

$$\{(x, \sqrt{1-x^2}) : x \in (-\varepsilon, \varepsilon)\} \subset U_1.$$

Como además  $U_1$  es  $p_{R'}$ -saturado, los puntos de  $\mathbb{S}^1$  que están  $R'$ -relacionados con esos también están en  $U_1$ , luego  $\{(x, -\sqrt{1-x^2}) : x \in (-\varepsilon, \varepsilon), x \neq 0\} \subset U_1$ . De esta forma tenemos que

$$(\{x, \sqrt{1-x^2} : x \in (-\varepsilon, \varepsilon)\} \cup \{(x, -\sqrt{1-x^2}) : x \in (-\varepsilon, \varepsilon), x \neq 0\}) \subset U_1$$

Análogamente, tenemos que  $\exists \varepsilon' > 0$  tal que

$$(\{x, \sqrt{1-x^2} : x \in (-\varepsilon', \varepsilon')\} \cup \{(x, -\sqrt{1-x^2}) : x \in (-\varepsilon', \varepsilon'), x \neq 0\}) \subset U_{-1}$$

luego  $U_1 \cap U_{-1} \neq \emptyset$ .

Esto implica que  $\tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_{-1} = p_{R'}(U_1) \cap p_{R'}(U_{-1}) \neq \emptyset$  puesto que

$$\emptyset \neq p_{R'}(U_1 \cap U_{-1}) \subset p_{R'}(U_1) \cap p_{R'}(U_{-1})$$

Hemos comprobado entonces que  $(\mathbb{S}^1/R', \mathcal{T}_u|_{\mathbb{S}^1})$  no es T2, luego no puede ser homeomorfo a  $(\mathbb{S}^1/R, \mathcal{T}_u|_{\mathbb{S}^1}/R)$ .